Roll No. .....

92006

B. Sc. Mathematics 3rd Semester Examination – December, 2022

ADVANCED CALCULUS

Paper : BM-231

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 40*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question from each Section. Question No. 9 is ***compulsory***. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं० 9 ***अनिवार्य*** है। सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

downloaded from StudentSuvidha.com

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) Verify Rolle's theorem for the function $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ on $[a,b], m,n \in N$.

फलन $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$ पर $[a,b], m,n \in N$ के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

(b) Evaluate $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x+\log(1-x)}{x+\tan^2 x}$.

मूल्यांकन करें $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x+\log(1-x)}{x+\tan^2 x}$.

2. (a) Prove that the function $f(x)=2x^2+3x-4$ is uniformly continuous on [–2, 2].

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=2x^2+3x-4$, [–2, 2] पर समान रूप से सतत है।

(b) Find the values of a, b, c so that :

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2.$$

a, b, c के मान ज्ञात करें ताकि :

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2.$$

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

SECTION – II

खण्ड – II

3. (a) Let $f : R^2 \to R$ be a function defined as :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Show that $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ does not exist.

माना कि $f : R^2 \to R$ एक फलन है जो निम्न रूप में परिभाषित है :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

दिखाएँ कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ मौजूद नहीं है।

(b) If $u = f(r)$, where $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

यदि $u = f(r)$, जहाँ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ सिद्ध करें कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

4. (a) State and prove Euler's theorem on homogeneous functions in x and y of degree n.

डिग्री n x एवं y में सजातीय फलनों पर यूलर के प्रमेय को बताएँ और साबित करें।

(b) Expand $x^4 + x^2y^2 - y^4$ about the point (1, 1) up to the terms of the second degree.

दूसरी डिग्री की शर्तों तक बिंदु (1, 1) के बारे में $x^4 + x^2y^2 - y^4$ का विस्तार करें।

SECTION – III

खण्ड – III

5. (a) Give an example of a function of two variables which is continuous and possesses first order partial derivatives at a point but not differentiable at the point.

दो चरों के फलन का एक उदाहरण दीजिए जो सतत है और एक बिंदु पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज रखता है लेकिन बिंदु पर अवकलनीय नहीं है।

(b) Give an example of a function $f(x, y)$ for which $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

एक फलन $f(x, y)$ का उदाहरण दें जिसके लिए $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ है।

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

6. (a) Examine for maximum and minimum values the function $\sin x + \sin y + \sin (x + y)$.

फलन $\sin x + \sin y + \sin (x + y)$ के अधिकतम और न्यूनतम मानों की जांच करें।

(b) Find the maximum and minimum distance of the point (3, 4, 12) from the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ using Lagrange's method of multipliers.

लैग्रेंज की गुणक विधि का उपयोग करके गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ से बिंदु (3, 4, 12) की अधिकतम और न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) Express the curve $\vec{r} = e^+ \cos t\hat{i} + e^+ \sin t.\hat{j} + e^+\hat{k}$ in the normal form.

वक्र $\vec{r} = e^+ \cos t\hat{i} + e^+ \sin t.\hat{j} + e^+\hat{k}$ को सामान्य रूप में व्यक्त करें।

(b) Find the equation of osculating plane of the curve $x = 2\log t, y = 4t, z = 2t^2 + 1$.

वक्र $x = 2\log t, y = 4t, z = 2t^2 + 1$ के ऑस्कुलेटिंग प्लेन के समीकरण ज्ञात करें।

8. (a) Find the curvature and torsion of the helix $x = a\cos t, y = a\sin t, z = at\tan\alpha$.

हेलिक्स $x = a\cos t, y = a\sin t, z = at\tan\alpha$ की वक्रता और मरोड़ का पता लगाएं।

(b) Find the envelope of the sphere $(x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 + z^2 = b^2$.

गोले $(x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 + z^2 = b^2$ के आवरण का पता लगाएँ।

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) Writ down the equation of osculating plane.

ऑस्कुलेटिंग प्लेन के समीकरण को लिखें।

(b) Find the envelope of family of paraboloid $x^2 + y^2 = ya(z - a)$.

पैराबोलॉइड $x^2 + y^2 = ya(z - a)$ के परिवार के आवरण का पता लगाएं।

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

(c) Verify Euler's theorem for $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

$u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ के लिए यूलर के प्रमेय को सत्यापित करें।

(d) If $u = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$ show that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

यदि $u = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$ दिखाइए कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

(e) Find unit tangent vector to the curve $\vec{r} = t\hat{i} + t^3\hat{j}$.

वक्र $\vec{r} = t\hat{i} + t^3\hat{j}$ के लिए इकाई स्पर्शरेखा वेक्टर ज्ञात करें।

(f) Examine for extreme value : $x^2 + y^2 + 6x + 12$.

चरम मान्य : $x^2 + y^2 + 6x + 12$ के लिए जांच करें।

---

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com